**Trabajo Práctico N° 3:**

**Álgebra de Boole.**

**Ejercicio 1.**

*En , se define la operación $ como a$b= a - b + ab. Analizar si la operación es cerrada y conmutativa en .*

Cerrada:

Dado que (, +, .) tiene estructura de Anillo, entonces, a$b .

Conmutativa:

a$b= a - b + ab

b$a= b - a + ba.

Por lo tanto, la operación es cerrada, pero no es conmutativa.

**Ejercicio 2.**

*Analizar si (, .) es un grupo conmutativo.*

Para que (, .) sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en :

Cerrada:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da un número natural:

Si a, b , entonces, ab .

Asociativa:

Para cualquier terna de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c , entonces, (ab) c= a (bc).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número natural tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en tal que:

a \* 1= 1 \* a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número natural no existe otro, único, que sumado a él dé como resultado el elemento neutro.

Conmutativa:

Para cualquier par de números naturales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b , entonces, ab= ba.

Por lo tanto, (, .) no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

**Ejercicio 3.**

*Sea H un conjunto y (P (H), ) el conjunto de Partes de H con la operación intersección. Analizar si (P (H), ) es un grupo conmutativo.*

Para que (P (H), ) sea un grupo conmutativo, la operación debe cumplir las siguientes propiedades en P (H):

Cerrada:

Para cualquier par de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección es un elemento de P (H):

Si A, B P (H), entonces, A B P (H).

Asociativa:

Para cualquier terna de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si A, B, C P (H), entonces, (A B) C= A (B C).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único elemento de P (H) tal que realizando su intersección con cualquier otro da como resultado el mismo elemento. El elemento neutro es H, ya que existe H en P (H) tal que:

A H= H A= A.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo elemento de P (H) no existe otro, único, que realizando la intersección con él dé como resultado el elemento neutro.

Conmutativa:

Para cualquier par de elementos de P (H), el resultado de realizar su intersección da lo mismo en cualquier orden:

Si A, B P (H), entonces, A B= B A.

Por lo tanto, (P (H), ) no es un grupo conmutativo, por no ser un grupo.

**Ejercicio 4.**

*Demostrar que ( - {0}, .) es un grupo conmutativo. Indicar por qué (, .) no es un grupo.*

Para que ( - {0}, .) sea un grupo conmutativo, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en - {0}:

Cerrada:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da un número real distinto de cero:

Si a, b - {0}, entonces, ab - {0}.

Asociativa:

Para cualquier terna de números reales, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c - {0}, entonces, (ab) c= a (bc).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número real distinto de cero tal que multiplicado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 1, ya que existe el 1 en - {0} tal que:

a \* 1= 1 \* a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número real distinto de cero existe otro, único, que multiplicado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a - {0}, entonces, a = a= 1.

Conmutativa:

Para cualquier par de números reales distintos de cero, el resultado de multiplicarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b - {0}, entonces, ab= ba.

Por lo tanto, ( - {0}, .) es un grupo conmutativo. Por otra parte, (, .) no es un grupo porque no se cumple la propiedad de existencia de elemento opuesto (no existe elemento opuesto para el 0).

**Ejercicio 5.**

*Sea E= {x: x x es par}. Demostrar que (E, +, .) es un anillo.*

Para que (E, +, .) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en E:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da un número entero par:

Si a, b E, entonces, a + b E.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c E, entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en E tal que:

a + 0= 0 + a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a E, entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

Conmutativa:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b E, entonces, a + b= b + a.

Para que (E, +, .) sea un anillo, por otro lado, la operación multiplicación debe cumplir las siguientes propiedades en E:

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da un número entero par:

Si a, b E, entonces, ab E.

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros pares, el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c E, entonces, (ab) c= a (bc).

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros pares, es posible distribuir la multiplicación respecto a la suma:

Si a, b, c E, entonces, a (b + c)= ab + ac y (b + c) a= ba + ca.

Por lo tanto, (E, +, .) es un anillo.

**Ejercicio 6.**

*Sea , la operación definida sobre los números enteros como a b= 2ab. Demostrar que (, +, ) es un anillo.*

Para que (, +, ) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en :

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si a, b , entonces, a + b .

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c , entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número entero tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en tal que:

a + 0= 0 + a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número entero existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a , entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

Conmutativa:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b , entonces, a + b= b + a.

Para que (, +, ) sea un anillo, por otro lado, la operación debe cumplir las siguientes propiedades en :

Cerrada:

Para cualquier par de números enteros, el resultado de realizar la operación da un número entero:

Si a, b , entonces, a b .

Asociativa:

Para cualquier terna de números enteros, el resultado de realizar la operación da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c , entonces, (a b) c= a (b c)

2ab c= a (2bc)

2 \* 2ab \* c= 2a \* (2bc)

4abc= 4abc.

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números enteros, es posible distribuir la operación respecto a la suma:

Si a, b, c , entonces,

a (b + c)= a b + a c

2a (b + c)= 2ab + 2ac

2ab + 2ac= 2ab + 2ac

y

(b + c) a= b a + c a

2 (b + c) a= 2ba + 2ca

2ba + 2ca= 2ba + 2ca.

Por lo tanto, (, +, ) es un anillo.

**Ejercicio 7.**

*En el conjunto P de los números pares se definen dos operaciones, una de ellas es la suma usual y la otra (#) está definida en la forma: si x, y P, x # y= . Demostrar que (P, +, #) tiene estructura de anillo.*

Para que (P, +, #) sea un anillo, por un lado, la operación suma debe cumplir las siguientes propiedades en P:

Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da un número entero:

Si a, b P, entonces, a + b P.

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c P, entonces, (a + b) + c= a + (b + c).

Existencia de elemento neutro:

Existe un único número par tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0, ya que existe el 0 en P tal que:

a + 0= 0 + a= a.

Existencia de elemento opuesto:

Para todo número par existe otro, único, que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

Si a P, entonces, a + (-a)= (-a) + a= 0.

Conmutativa:

Para cualquier par de números pares, el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden:

Si a, b P, entonces, a + b= b + a.

Para que (P, +, #) sea un anillo, por otro lado, la operación # debe cumplir las siguientes propiedades en P:

Cerrada:

Para cualquier par de números pares, el resultado de realizar la operación # da un número entero:

Si a, b P, entonces, a # b P.

Asociativa:

Para cualquier terna de números pares, el resultado de realizar la operación # da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

Si a, b, c P, entonces, (a # b) # c= a # (b # c)

# c= a #

=

= .

Distributiva respecto a la suma:

Para cualquier terna de números pares, es posible distribuir la operación # respecto a la suma:

Si a, b, c P, entonces,

a # (b + c)= a # b + a # c

= +

= +

+ = +

y

(b + c) # a= b # a + c # a

= +

= +

+ = + .

Por lo tanto, (P, +, #) tiene estructura de anillo.

**Ejercicio 8.**

*Sean A, B, C elementos de un álgebra de Boole G= (F, +, ., ‘, 0, 1), indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, señalando los axiomas usados:*

**(a)** *A + (AC)= (A + A) (A + C).*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B4) de distributividad de la suma con respecto a la multiplicación.

**(b)** *AB + 0= AB.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

**(c)** *CB1= CB.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B6) de existencia de elemento neutro (1) de la multiplicación.

**(d)** *(AB)´ + AB= 0.*

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B7), (AB)’ + AB= 1.

**(e)** *CA(CA)’ + B= B.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B8) y (B5), CA(CA)’= 0 y 0 + B= B.

**(f)** *CA + 0= 0.*

Esta igualdad es FALSA, por el axioma (B5) de existencia de elemento neutro (0) de la suma.

**(g)** *(AB)’ + AB + CC’= 1.*

Esta igualdad es VERDADERA, por el axioma (B7) y (B8), (AB)’ + AB= 1, CC’= 0, 1 + 0= 1.

**Ejercicio 9.**

*Sea H= {a, b, c, d, e} y sean = (P (H), , , , , H) el álgebra de Boole de partes de H. Los siguientes conjuntos son elementos de P (H): {b}, {c}, {d}, {b, c}, {c, d}, {b, d}, {b, c, d}, {b, d, e}, {b, c, d, e}. Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.*

{b, c, d, e}

{b, c, d} {b, d, e}

{b, c} {b, d} {c, d}

{b} {c} {d} {e}

**Ejercicio 10.**

*Sea W el conjunto formado por las clases de 3 letras proposicionales [p], [q], [r] y sus conjunciones, disyunciones y negaciones. Sea = (W, , , , , ) del álgebra de Boole del cálculo proposicional. Las siguientes proposiciones son elementos de W: [p q], [q r], [p], [q], [r], [q r]. Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.*

[q r]

[p] [q] [r]

[p q] [q r]

**Ejercicio 11.**

*Sean B= , + la suma usual de enteros, . el producto usual de enteros y, para cada a , se define a’= -a. ¿Es H= (B, +, ., ‘, 0, 1) un álgebra booleana?*

Para que H= (B, +, ., ‘, 0, 1) sea un álgebra booleana, se deben cumplir las siguientes propiedades en B. Sean x, y, z B:

(B1) x + y= y + x. Se cumple.

(B2) xy= yx. Se cumple.

(B3) x (y + z)= xy + xz. Se cumple.

(B4) x + yz= (x + y) (x + z). Se cumple.

(B5) x + 0= x. Se cumple.

(B6) x1= x. Se cumple.

(B7) x + x’= 1. Se cumple.

(B8) xx’= 0. Se cumple.

Por lo tanto, H= (B, +, ., ‘, 0, 1) es un álgebra booleana.

**Ejercicio 12.**

*Demostrar que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces, 1’= 0 y 0’= 1.*

Por el axioma (B7), se cumple que:

0 + 0’= 1 y

1 + 1’= 1.

Además, por el axioma (B5), se cumple que:

0’= 1 y

1’= 0.

Por lo tanto, queda demostrado que, si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Álgebra de Boole, entonces, 1’= 0 y 0’= 1.

**Ejercicio 13.**

**(a)** *Probar la Ley de De Morgan: (xy)’= x’ + y’.*

Teniendo en cuenta que el complemento es único, se debe tener que:

(i) (xy) + (x’ + y’)= 1 y

(ii) (xy) (x’ + y’)= 0.

Si esto se cumple, quiere decir que (x’ + y’) es el complemento de (xy).

(i)

(xy) + (x’ + y’)= [(x’+ y’) + x] [(x’ + y’) + y] por axioma (B4)

(xy) + (x’ + y’)= [(x’ + x) + y’] [(y’ + y) + x’] por axioma (B1) y asociatividad

(xy) + (x’ + y’)= (1 + y’) (1 + x’) por axioma (B7)

(xy) + (x’ + y’)= 1 \* 1 por ley de acotación

(xy) + (x’ + y’)= 1.

(ii)

(xy) (x’ + y’)= [x’ (xy)] [y’ (xy)] por axioma (B5)

(xy) (x’ + y’)= [(x’x) y] [(y’y) x] por axioma (B2) y asociatividad

(xy) (x’ + y’)= (0 \* y) (0 \* x) por axioma (B8)

(xy) (x’ + y’)= 0 \* 0 por ley de acotación

(xy) (x’ + y’)= 0.

Por lo tanto, queda demostrado la Ley de De Morgan (xy)’= x’ + y’, ya que (x’ + y’) es el complemento de (xy).

**(b)** *Expresar las Leyes de De Morgan en los conjuntos y en el cálculo proposicional, con los símbolos y operaciones que corresponden en cada caso.*

Leyes de De Morgan en teoría de conjuntos:

= .

= .

Leyes de De Morgan en teoría de lógica proposicional:

(p q)= p q.

(p q)= p q.

**Ejercicio 14.**

*Si x, y, z, w son variables de un Álgebra de Boole, simplificar (hasta su mínima expresión) las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas:*

**(a)** *x + xy + x (x + y).*

x + xy + x (x + y)= x + xy + xx + xy por axioma (B5)

x + xy + x (x + y)= x + xy + x + xy por ley de idempotencia

x + xy + x (x + y)= x (1 + y) + x (1 + y) por axiomas (B6) y (B3)

x + xy + x (x + y)= x \* 1 + x \* 1 por ley de acotación

x + xy + x (x + y)= x + x por axioma (B6)

x + xy + x (x + y)= x. por ley de idempotencia

**(b)** *x’ + [(xx’)’].*

x’ + [(xx’)’]= x’ + (x’ + x) por Ley de De Morgan

x’ + [(xx’)’]= x’ + 1 por (B7)

x’ + [(xx’)’]= x’. por ley de acotación

**(c)** *x (y + x’)’.*

x (y + x’)’= x (y’x) por Ley de De Morgan

x (y + x’)’= xxy’ por asociatividad

x (y + x’)’= xy’. por ley de idempotencia

**(d)** *[x (y’y)] + [y (x + x’)].*

[x (y’y)] + [y (x + x’)]= (x \* 0) + (y \* 1) por axiomas (B8) y (B7)

[x (y’y)] + [y (x + x’)]= 0 + y por ley de acotación y axioma (B6)

[x (y’y)] + [y (x + x’)]= y. por axioma (B5).

**(e)** *y’xy + y’x + ywx’ + yww.*

y’xy + y’x + ywx’ + yww= y’yx + y’x + ywx’ + yw por asociatividad y ley de idempotencia

y’xy + y’x + ywx’ + yww= 0 \* x + y’x + ywx’ + yw por axioma (B8)

y’xy + y’x + ywx’ + yww= 0 + y’x + ywx’ + yw por ley de acotación

y’xy + y’x + ywx’ + yww= y’x + ywx’ + yw

y’xy + y’x + ywx’ + yww= y’x + yw (x’ + 1) por axiomas (B6) y (B3)

y’xy + y’x + ywx’ + yww= y’x + yw \* 1 por ley de acotación

y’xy + y’x + ywx’ + yww= y’x + yw. por axioma (B6)

**(f)** *[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’].*

[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= [(x’y’) + z’] [z’ + (x’yz)] por Leyes de De Morgan e involución

[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= (z’ + x’y’) (z’ + x’yz) por axioma (B1)

[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’ + (x’y’) (x’yz) por axioma (B4)

[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’ + [(x’x’) (y’y) z] por axioma (B2)

[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’ + (x’ \* 0 \* z) por ley de idempotencia y por axioma (B8)

[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’ + 0 por ley de acotación

[(x + y)’ + z’] [z’ + (x + (yz)’)’]= z’. por axioma (B5)

**Ejercicio 15.**

*Si x, y, z son variables de un Álgebra de Boole, demostrar que:*

**(a)** *x’y’z + x’yz + xy’z + xyz + xyz’= z + xy.*

x’y’z + x’yz + xy’z + xyz + xyz’= x’z (y’ + y) + xy’z + xy (z + z’)

x’y’z + x’yz + xy’z + xyz + xyz’= x’z \* 1 + xy’z + xy \* 1

x’y’z + x’yz + xy’z + xyz + xyz’= x’z + xy’z + xy

x’y’z + x’yz + xy’z + xyz + xyz’= z (x’ + xy’) + xy.

**(b)** *x + (y + 0)’ + y’z= x + y’.*

x + (y + 0)’ + y’z= x + y’ + y’z

x + (y + 0)’ + y’z= x + y’ (1 + z)

x + (y + 0)’ + y’z= x + y’ \* 1

x + (y + 0)’ + y’z= x + y’.

**(c)** *x + y’ + (xy + 0)’= 1.*

x + y’ + (xy + 0)’= x + y’ + (xy + 0)’

x + y’ + (xy + 0)’= x + y’ + (xy)’

x + y’ + (xy + 0)’= x + y’ + x’ + y’

x + y’ + (xy + 0)’= (x + x’) + (y’ + y’)

x + y’ + (xy + 0)’= 1 + y’

x + y’ + (xy + 0)’= 1.

**(d)** *x + (y + 1)’ + xy= x.*

x + (y + 1)’ + xy= x + y’ \* 0 + xy

x + (y + 1)’ + xy= x + 0 + xy

x + (y + 1)’ + xy= x + xy

x + (y + 1)’ + xy= x (1 + y)

x + (y + 1)’ + xy= x \* 1

x + (y + 1)’ + xy= x.

**(e)** *[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= 1.*

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= [(zx) + (zx)’] + x (y + y’)

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= [(zx) + (z’ + x’)] + x \* 1

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= zx + (z’ + x’) + x

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x (1 + z)

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x \* 1

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= (z’ + x’) + x

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= z’ + (x’ + x)

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= z’ + 1

[(zx)’ zx]’ + xy + xy’= 1.

**(f)** *x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0.*

x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= x (yx’ + yy’)

x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= x (yx’ + 0)

x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= xy’x’

x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= xx’y

x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0 \* y

x [(y’ + x)’ + (y’ + y)’]= 0.

**Ejercicio 16.**

**(a)** *Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **C** | **F (A, B, C)** |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

F (A, B, C)= A’B’C’ + AB’C’ + ABC’.

**(b)** *Simplificar la expresión hallada.*

F (A, B, C)= A’B’C’ + AB’C’ + ABC’

F (A, B, C)= (A’B’ + AB’ + AB) C’

F (A, B, C)= [(A’ + A) B’ + AB] C’

F (A, B, C)= (1 \* B’ + AB) C’

F (A, B, C)= (B’ + AB) C’.

F (A, B, C)= [A’B’ + A (B’ + B)] C’

F (A, B, C)= (A’B’ + A \* 1) C’

F (A, B, C)= (A’B’ + A) C’.

**Ejercicio 17.**

**(a)** *Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **C** | **D** | **F (A, B, C, D)** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

F (A, B, C, D)= A’B’C’D’ + A’B’CD’ + A’BC’D’ + A’BC’D + A’BCD’ + A’BCD + ABC’D + ABCD.

**(b)** *Simplificar la expresión hallada.*

F (A, B, C, D)= A’B’C’D’ + A’B’CD’ + A’BC’D’ + A’BC’D + A’BCD’ + A’BCD + ABC’D + ABCD

F (A, B, C, D)= A’B’D’ (C’ + C) + A’BC’ (D’ + D) + A’BC (D’ + D) + ABD (C’ + C)

F (A, B, C, D)= A’B’D’ \* 1 + A’BC’ \* 1 + A’BC \* 1 + ABD \* 1

F (A, B, C, D)= A’B’D’ + A’BC’ + A’BC + ABD

F (A, B, C, D)= A’B’D’ + A’B (C’ + C) + ABD

F (A, B, C, D)= A’B’D’ + A’B \* 1 + ABD

F (A, B, C, D)= A’B’D’ + A’B + ABD

F (A, B, C, D)= A’ (B’D’ + B) + ABD.

F (A, B, C, D)= A’B’D’ + B (A’ + AD).

**Ejercicio 18.**

*Sea f: un isomorfismo de álgebras booleanas. Si se llama y al 0 de y , respectivamente, y y al 1 de y , respectivamente, demostrar que f ()= y f ()= .*

Para cualquier elemento b de , b + = b. Como f es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que f (b + )= f (b) + f (). Pero, debido a que es el elemento identidad aditivo en , f (b + )= f (b) + = f (b), lo que implica que f ()= . Por lo tanto, queda demostrado que f ()= .

Para cualquier elemento b de , b \* = b. Como f es un isomorfismo, preserva la estructura algebraica, lo que significa que f (b \* )= f (b) \* f (). Pero, debido a que es el elemento identidad multiplicativo en , f (b \* )= f (b) \* = f (b), lo que implica que f ()= . Por lo tanto, queda demostrado que f ()= .

**Ejercicio 19.**

**(a)** *Hallar un isomorfismo entre = {, , , ‘, (0, 0), (1, 1)} y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.*

Para encontrar un isomorfismo entre y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva f que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto A= {a, b} y se considera el álgebra de Boole de partes de A, denotada por P (A). Entonces, se tiene:

* representa el conjunto de subconjuntos de A, es decir, = P (A).
* La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
* El complemento de un subconjunto A se corresponde con su complemento relativo en A, es decir, A’= {x A: x A}.
* La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función f: P (A) como sigue:

* Para cada par ordenado (0, 0) en , f lo mapea al conjunto vacío en P (A).
* Para cada par ordenado (1, 1) en , f lo mapea al conjunto A en P (A).
* Para cada par ordenado (0, 1) en , f lo mapea al conjunto {b} en P (A).
* Para cada par ordenado (1, 0) en , f lo mapea al conjunto {a} en P (A).

Se puede verificar que f es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

* La función f es inyectiva porque cada par ordenado en se mapea a un único subconjunto en P (A) y f es suryectiva porque todo subconjunto de A se puede representar como un par ordenado en .
* La función f preserva la disyunción, ya que f ((, ) (, ))= f ((1, 1)) si y sólo si (, )= (1, 1) o (, )= (1, 1), lo que implica que f ((, ) (, ))= A si y sólo si f ((, ))= A o f ((, ))= A.
* La función f preserva la conjunción, ya que f ((, ) (, ))= f ((1, 1)) si y sólo si (, )= (1, 1) y (, )= (1, 1), lo que implica que f ((, ) (, ))= A si y sólo si f ((, ))= A y f ((, ))= A.
* La función f preserva el complemento, ya que f ((x, y)’)= f ((1, 1)) si y sólo si (x, y)’= (1, 1), lo que implica que f ((x, y)’)= A si y sólo si f ((x, y))= .
* La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si (, ) (, ), entonces f ((, )) f ((, )).

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre y el álgebra de Boole de partes de A (P (A)).

Diagrama de Hasse de :

(1, 1)

(1, 0) (0, 1)

(0, 0)

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

A

{a} {b}

**(b)** *Hallar un isomorfismo entre = {, , , ‘, (0, 0, 0), (1, 1, 1)} y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.*

Para encontrar un isomorfismo entre y el álgebra de Boole de partes de un conjunto, se necesita encontrar una función biyectiva f que preserve las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión.

Primero, se define un conjunto A= {a, b, c} y se considera el álgebra de Boole de partes de A, denotada por P (A). Entonces, se tiene:

* representa el conjunto de subconjuntos de A, es decir, = P (A).
* La disyunción y la conjunción de subconjuntos corresponden a las operaciones de disyunción y conjunción de conjuntos, respectivamente.
* El complemento de un subconjunto A se corresponde con su complemento relativo en A, es decir, A’= {x A: x A}.
* La relación de orden de inclusión se corresponde con la relación de inclusión de conjuntos.

Ahora, se define la función f: P (A) como sigue:

* Para cada par ordenado (0, 0, 0) en , f lo mapea al conjunto vacío en P (A).
* Para cada par ordenado (1, 1, 1) en , f lo mapea al conjunto A en P (A).
* Para cada par ordenado (0, 0, 1) en , f lo mapea al conjunto {c} en P (A).
* Para cada par ordenado (0, 1, 0) en , f lo mapea al conjunto {b} en P (A).
* Para cada par ordenado (1, 0, 0) en , f lo mapea al conjunto {a} en P (A).
* Para cada par ordenado (0, 1, 1) en , f lo mapea al conjunto {b, c} en P (A).
* Para cada par ordenado (1, 0, 1) en , f lo mapea al conjunto {a, c} en P (A).
* Para cada par ordenado (1, 1, 0) en , f lo mapea al conjunto {a, b} en P (A).

Se puede verificar que f es biyectiva y preserva las operaciones de disyunción, conjunción, complemento y la relación de orden de inclusión:

* La función f es inyectiva porque cada par ordenado en se mapea a un único subconjunto en P (A) y f es suryectiva porque todo subconjunto de A se puede representar como un par ordenado en .
* La función f preserva la disyunción, ya que f ((, , ) (, , ))= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (, , )= (1, 1, 1) o (, , )= (1, 1, 1), lo que implica que f ((, , ) (, , ))= A si y sólo si f ((, , ))= A o f ((, , ))= A.
* La función f preserva la conjunción, ya que f ((, , ) (, , ))= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (, , )= (1, 1, 1) y (, , )= (1, 1, 1), lo que implica que f ((, , ) (, , ))= A si y sólo si f ((, , ))= A y f ((, , ))= A.
* La función f preserva el complemento, ya que f ((x, y, z)’)= f ((1, 1, 1)) si y sólo si (x, y, z)’= (1, 1, 1), lo que implica que f ((x, y, z)’)= A si y sólo si f ((x, y, z))= .
* La función f preserva la relación de orden de inclusión, ya que, si (, , ) (, , ), entonces f ((, , )) f ((, , )).

Por lo tanto, f es un isomorfismo entre y el álgebra de Boole de partes de A (P (A)).

Diagrama de Hasse de :

(1, 1, 1)

(1, 1, 0) (1, 0, 1) (0, 1, 1)

(1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1)

(0, 0, 0)

Diagrama de Hasse del álgebra de Boole de partes de un conjunto:

A

{a, b} {a, c} {b, c}

{a} {b} {c}